

E8. Potrebno je napraviti simulaciju skoka kojeg izvodi Subaru Impreza (2010) pri brzini od 146 kmh^{-1} .



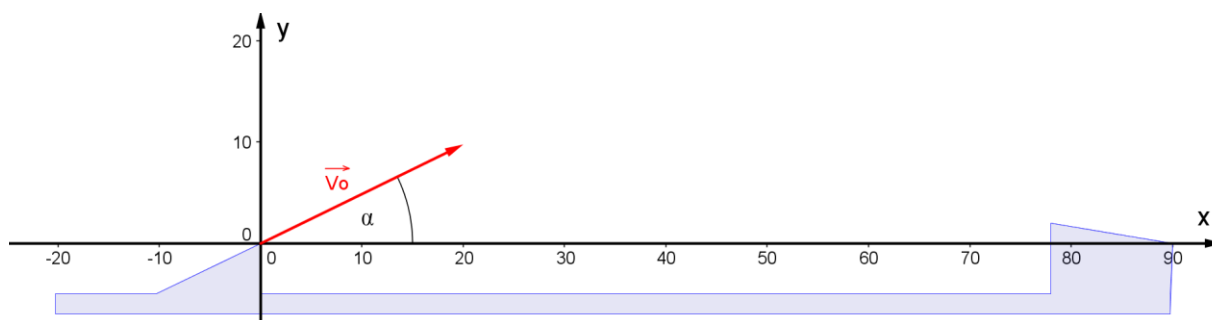
Koristeći Excel procijenite kako domet ovisi o kutu nagiba uzletne staze te približno odredite nagib staze potreban za preskočiti 82 m.

0. Pretpostavke

Pojednostavnit ćemo problem: promatramo 2D gibanje, rotacije zanemarujemo, zanemarujemo djelovanje svih sila osim sile teže i otpora zraka.

1. Koordinatni sustav

Relacije, koje opisuju ovisnost među fizikalnim veličinama, (fizikalni zakoni) ne ovise o izboru koordinatnog sustava pa ga biramo proizvoljno, kako nam je jednostavnije. U ovom slučaju, postavljamo ishodište koordinatnog sustava u točki u kojoj auto napušta uzletnu stazu kao na slici dolje



2. Početni položaj i početna brzina

- ✓ Početna brzina automobila

$$|\vec{v}_0| = 146 \text{ kmh}^{-1} = 146 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{146}{3.6} \text{ ms}^{-1}$$

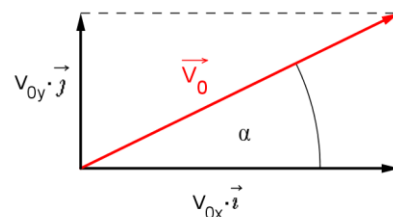
Sve vektorske veličine rastavljamo na komponente (komponenta negativna ako je usmjerena suprotno osima odabranog koordinatnog sustava). Rastavimo brzinu na komponente.

Excel funkcije SIN(kuta) i COS(kuta) uzimaju kut u radijanima:

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} \cdot \pi$$

$$\sin(\text{kut}) = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\cos(\text{kut}) = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$



$$v_{x,0} = v_0 \cdot \cos \alpha ; v_{y,0} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

- ✓ Početni položaj (ovisno o izboru koordinatnog sustava)

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$

3. Akceleracija i sile koje djeluju na tijelo

- ✓ Sila teža djeluje na svako tijelo na Zemlji, a ima smjer prema središtu Zemlje te iznosi

$$|\vec{F}_g| = mg$$

gdje je ubrzanje Zemljine sile teže

$$g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

a masa automobila zajedno s vozačem

$$m \approx 1.5 \text{ t} = 1500 \text{ kg}$$

- ✓ Sila otpora zraka ima smjer suprotan brzini tijela, a iznos proporcionalan kvadratu brzine

$$\vec{F}_{OZ} = -Dv\vec{v} = -Dv \cdot (v_x\hat{i} + v_y\hat{j})$$

$$\vec{F}_{OZ} = -Dvv_x \cdot \hat{i} - Dvv_y \cdot \hat{j}$$

gdje je D konstanta proporcionalnosti

$$D = \frac{\rho CA}{2},$$

ρ gustoća medija kroz koji se tijelo giba (u našem slučaju zrak)

$$\rho = 1.23 \text{ kgm}^{-3},$$

C koeficijent otpora za Subaru (http://en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient)

$$C = 0.36,$$

A udarna površina (poprečni presjek koji se „urezuje“ kroz medij)

$$A \approx 3 \text{ m}^2.$$

Rastavimo sve sile koje djeluju na tijelo (auto) na komponente kako bismo odredili komponente ukupne sile na tijelo i iskoristili 2. Newton-ov zakon za tijela konstantne mase

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} \Leftrightarrow a_x = \frac{F_x}{m}; a_y = \frac{F_y}{m}; a_z = \frac{F_z}{m}$$

Komponente, koje su usmjerene suprotno osima odabranog koordinatnog sustava, negativne su.

Sa slike zaključujemo

$$F_x = F_{OZx} = -Dvv_x$$

$$F_y = F_{OZy} - mg = -Dvv_y - mg$$

pa je

$$a_x(t) = -\frac{D}{m} \cdot v(t) \cdot v_x(t)$$

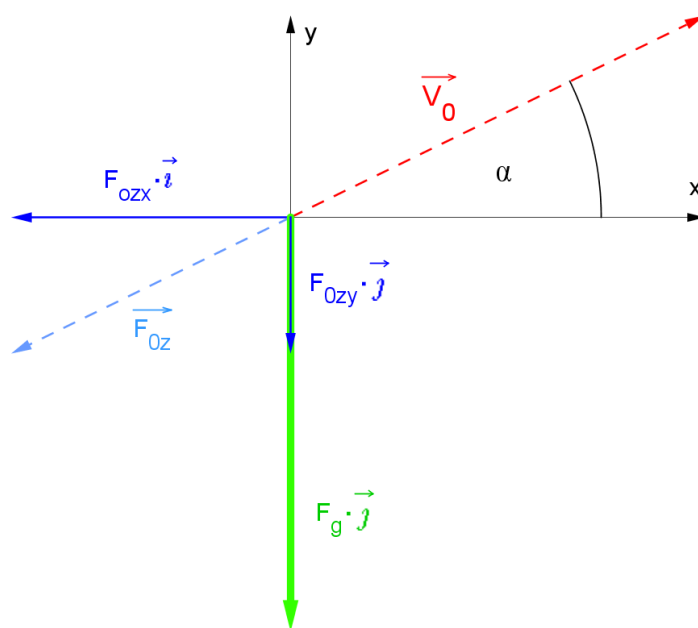
$$a_y(t) = -g - \frac{D}{m} \cdot v(t) \cdot v_y(t)$$

odnosno

$$a_{x,i} = -\frac{D}{m} \cdot v_i \cdot v_{x,i}$$

$$a_{y,i} = -g - \frac{D}{m} \cdot v_i \cdot v_{y,i}$$

$$v_i = \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2}$$



4. Modeliranje u Excelu: Definiranje vremenske skale

- ✓ Odaberemo dovoljno mali vremenski interval Δt na kojem je uvijek akceleracija približno konstantna.

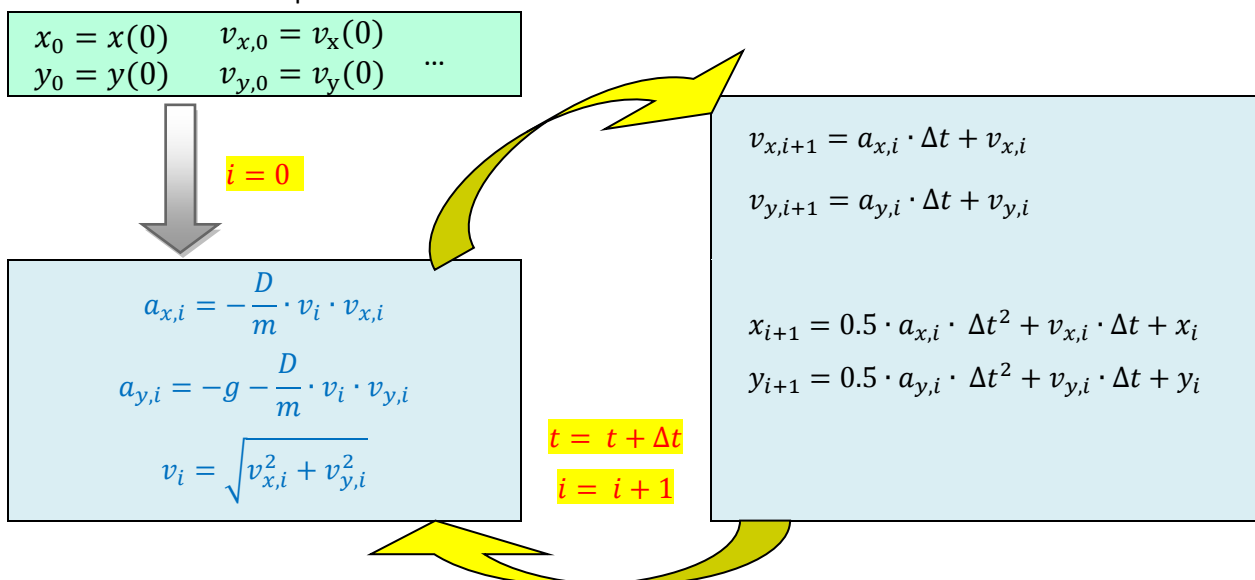
$$t_i = i \cdot \Delta t \quad ; \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- ✓ Excel-polju možemo dodijeliti i neku novu adresu pa nju koristiti umjesto apsolutne, npr. označimo polje s vrijednošću od Δt (B12) i na mjesto njegove adrese upišimo dt (sada dt znači isto kao i \$B\$12).
- ✓ U stupac E unijet ćemo vremena pa u E1 upišemo oznaku za vrijeme: t/s .
- ✓ U E2 upišemo početno vrijeme: 0.
- ✓ U E3 definiramo sljedeće vrijeme: $=E2+dt$.
- ✓ Polje E3 kopiramo sve do npr. 240 retka povlačenjem kvadratića u donjem desnom kutu iz E3.

5. Novi položaji i brzine

Kako bismo dobili što realističniju simulaciju, odaberemo dovoljno mali vremenski interval Δt na kojem se akceleracija ne mijenja ili se mijenja zanemarivo. Na temelju poznatih vrijednosti fizikalnih veličina u (starom) trenutku $t_i = i\Delta t$ određujemo veličine u (novom) trenutku $t_{i+1} = t + \Delta t$. Zatim trenutak t_{i+1} postaje stari i računamo vrijednosti u novom trenutku $t + 2\Delta t$ itd. ponavljamo $t_{\text{novi}} = t_{\text{staro}} + \Delta t$.

Shematski to možemo prikazati ovako:



Oznake: $v_{x,i+1} \equiv v_x(t_i + \Delta t)$ je x-komponenta brzine u trenutku $t_{i+1} = t_i + \Delta t = (i + 1)\Delta t$. Analogna interpretacija vrijedi za ostale veličine

6. Simuliranje: Domet

- ✓ Ovako definirano gibanje ima smisla sve dok visina (y-vrijednosti) ne postane negativna pa podatke za koje je visina negativna možemo brisati.
- ✓ Domet (daljina koju je auto preskočilo) određujemo iz x vrijednosti u trenutku kada y odgovara visini sletne. Mijenjanjem vrijednosti kuta nagiba staze α možemo uočiti kako o njemu ovise ostale veličine pa tako i domet.
- ✓ Putanju ćemo dobiti crtajući $y - x$ graf. Rješenje: [04 E8 Skok.xlsx](#).

7. Simuliranje: Određivanje nagiba staze

- ✓ Postavimo li $\alpha = 17^\circ$ možemo primijetiti da je domet $x = 82$ m za sletnu stazu koja se nalazi na visini oko 2.5 m.
- ✚ Kako smo slučaj pojednostavnili, stvarne vrijednosti mogu malo odstupati od dobivenih.
- ✚ Realna zakrivljenost putanje vidljiva je ako su iste skale na x i y osi.